

用 HHT 方法识别强迫振动下线性双自由度体系的模态参数*

郭淑卿 梁建文** 张郁山

天津大学建筑工程学院, 天津 300072

摘要 提出了一种识别强迫振动下线性双自由度体系模态参数的方法, 体系的动力响应数据在 EMD 分解后, 进行 Hilbert 变换, 然后用最小二乘法拟合其瞬态幅值及相位角, 得到体系的自振频率及阻尼比, 方法具有较高的精度。

关键词 系统识别 EMD 方法 自振频率 阻尼比 最小二乘法

体系的自振频率、阻尼比等模态参数的识别是结构动力分析中经常遇到的问题。针对传统方法在线性体系模态识别中碰到的困难, 本文采用 Hilbert-Huang 变换 (HHT) 来研究这一问题。HHT 变换是一种全新的数据处理方法, 由经验模态分解 (empirical mode decomposition, EMD) 方法及 Hilbert 变换两部分组成^[1-2], 其核心是 EMD 分解。EMD 分解方法与建立在先验性谐波基函数和小波基函数上的 Fourier 分解与小波分解不同, 它依据数据本身的时间尺度特征来进行分解, 比 Fourier 及小波分析方法更适合于处理非平稳数据和非线性数据。此方法一提出就在多个领域中迅速得到了应用。Vincent^[3] 等应用 EMD 方法研究结构的损伤识别问题。Yang 等^[4] 在 EMD 方法的基础上实现了自由振动体系的系统识别。张郁山则提出了用 HHT 方法分析单自由度线性体系在强迫振动下的系统识别问题¹⁾。由于在实际工程中也常得到强迫振动的数据, 因此本文进一步提出了 HHT 用于强迫振动下线性双自由度体系模态参数识别的方法。

1 Hilbert-Huang 变换

1.1 EMD 方法

EMD 方法通过一种被称为“筛分”的过程, 对数据逐步进行分解, 最后得到一系列本征模态函数 (intrinsic mode function, IMF)。具体处理方法是: 给定实信号 $x(t)$, 找出 $x(t)$ 所有的极大值点并将其用三次样条函数拟合成原始信号的上包络线, 找出 $x(t)$ 所有的极小值点并将其用三次样条函数拟合成原始信号的下包络线, 上下包络线的均值为原始信号的包络线平均 $m_1(t)$; 将原始信号 $x(t)$ 减去 $m_1(t)$ 后即可得到一个新的信号 $h_1(t)$, 这个过程称为筛分。一般说来, $h_1(t)$ 仍然不是一个 IMF 分量, IMF 分量必须满足以下两个条件: (a) 极值点数目和零点数目相等或最多相差 1 个; (b) 在任意时刻, 由局部极大值点和局部极小值点构成的两条包络线的平均值为 0。为此需要对它重复上述筛分处理。重复处理 k 次后, 若最后所得到的信号满足 IMF 分量条件, 就得到了原始信号的第 1 个 IMF 分量 $c_1(t)$ 。将 $c_1(t)$ 从原始数列中分离出来

2005-03-08 收稿, 2005-10-13 收修改稿

* 国家自然科学基金资助项目(批准号: 50378063, 50278090)

** 通讯作者, E-mail: liang@tju.edu.cn

1) 张郁山, Hilbert-Huang 变换与地震动时程的 Hilbert 谱, 中国地震局地球物理研究所博士论文, 北京, 2003

$$x(t) - c_1(t) = r_1(t), \quad (1)$$

将余项 $r_1(t)$ 重新应用上述步骤处理, 直到再也没有 IMF 分量筛分出为止. 这样, 可以从原始数列中分离出 n 个 IMF 分量 $c_1(t), c_2(t) \dots c_n(t)$ 和一个残量 $r_n(t)$, 即

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) + r_n(t), \quad (2)$$

然后对各 IMF 分量作 Hilbert 变换, 得到的谱称为 Hilbert 谱, 能够反应信号的时频特征.

1.2 基于 Fourier 分析的 EMD 方法

在 EMD 分解过程中, 当数据中的两个或两个以上振动模态频率太近或幅值相差较大时, 容易发生模态混淆, 直接用 EMD 方法不能实现分解, 即使使用 EMD 方法中的间断检测 (intermittency test) 也不能实现. 但是由数据的 Fourier 谱, 可以得到每个频率的大致范围, $\omega_{jL} < \omega_j < \omega_{jH}$ ($j=1, 2, \dots, n$). 这样原始数据 $x(t)$ 通过频带为 $\omega_{jL} < \omega_j < \omega_{jH}$ 的 Fourier 滤波器, 再进行 EMD 分解得到的第一个 IMF 分量即与此振动模态相近. 对于其他频带也进行相同的处理, 这样就可以得到几个筛分良好的 IMF 分量, 而不发生模态混淆. 这一方法非常适于强迫振动动力响应的模态分解. 需要指出的是, Yang^[4] 也曾引入过 Fourier 变换.

2 强迫振动下线性双自由度体系的模态识别

若初始条件为零, 在简谐激励作用下, 双自由度体系第 j 层 ($j=1, 2$) 的绝对加速度 \ddot{x}_j 可以表示为

$$\begin{aligned} \ddot{x}_j &= \ddot{x}_{j1} + \ddot{x}_{j2} + \ddot{x}_j^* \\ &= c_{j1} e^{-\zeta_1 \omega_1 t} \cos(\omega_{d1} t + \varphi_{j1}) + c_{j2} e^{-\zeta_2 \omega_2 t} \\ &\quad \cos(\omega_{d2} t + \varphi_{j2}) + g_j \cos(\omega_0 t + \varphi), \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$c_{j1} = \sqrt{a_{j1}^2 + b_{j1}^2}, \quad \varphi_{j1} = \arctan \frac{b_{j1}}{a_{j1}}, \quad (4)$$

$$c_{j2} = \sqrt{a_{j2}^2 + b_{j2}^2}, \quad \varphi_{j2} = \arctan \frac{b_{j2}}{a_{j2}}. \quad (5)$$

$a_{j1}, b_{j1}, a_{j2}, b_{j2}$ 分别为 \ddot{x}_{j1} 和 \ddot{x}_{j2} 的实部和虚部;

ω_{d1}, ω_{d2} 为体系有阻尼自振频率; $\varphi_{j1}, \varphi_{j2}, \varphi$ 为相位角; ω_0 为激励频率; ω_1 和 ω_2 为体系自振频率; ζ_1 和 ζ_2 为阻尼比.

在(3)式中, $\ddot{x}_{j1}, \ddot{x}_{j2}$ 为输入简谐波在各层所引起的体系瞬态反应, \ddot{x}_j^* 为输入简谐波引起的体系稳态反应. 由于 $\ddot{x}_{j1}, \ddot{x}_{j2}$ 与 \ddot{x}_j^* 为双自由度体系的固有振动模态, 所以在经过分解后所得到的主要 IMF 分量应与 $\ddot{x}_{j1}, \ddot{x}_{j2}$ 或 \ddot{x}_j^* 相对应. 由 IMF 分量可以区别出稳态反应和瞬态反应. 设与体系瞬态反应 \ddot{x}_{jk} 相应的 IMF 分量为 $c_i(t)$, 考虑到 EMD 方法本身的数值误差 (如边界效应带来的误差), $c_i(t)$ 只是与 \ddot{x}_{jk} 近似相等, 即

$$c_i(t) \approx \ddot{x}_{jk} = c_{jk} e^{-\zeta_k \omega_k t} \cos(\omega_{djk} t + \varphi_{jk}), \quad (6)$$

$c_i(t)$ 的 Hilbert 变换为^[4]

$$H[c_i(t)] = c_{jk} [a_{LP}(t) \sin(\omega_{djk} t + \varphi_{jk}) + \hat{a}_{HP}(t) \cos(\omega_{djk} t + \varphi_{jk})], \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} a_{LP}(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_{djk}} \frac{2\zeta_k \omega_k}{\zeta_k^2 \omega_k^2 + \omega^2} \cos(\omega t) d\omega, \\ \hat{a}_{HP}(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{\omega_{djk}}^{\infty} \frac{2\zeta_k \omega_k}{\zeta_k^2 \omega_k^2 + \omega^2} \sin(\omega t) d\omega. \end{aligned} \quad (8)$$

因此与 $c_i(t)$ 相应的解析信号为

$$\begin{aligned} A[c_i(t)] &= c_i(t) + iH[c_i(t)] = c_{jk} e^{-\zeta_k \omega_k t} \cdot \\ &\quad \cos(\omega_{djk} t + \varphi_{jk}) + \\ &\quad ic_{jk} [a_{LP}(t) \sin(\omega_{djk} t + \varphi_{jk}) + \\ &\quad \hat{a}_{HP}(t) \cos(\omega_{djk} t + \varphi_{jk})]. \end{aligned} \quad (9)$$

与 $c_i(t)$ 相应的瞬态幅值及瞬态相位分别为

$$\begin{aligned} a(t) &= c_{jk} \{ e^{-2\zeta_k \omega_k t} \cos^2(\omega_{djk} t + \varphi_{jk}) + \\ &\quad [a_{LP}(t) \sin(\omega_{djk} t + \varphi_{jk}) + \\ &\quad \hat{a}_{HP}(t) \cos(\omega_{djk} t + \varphi_{jk})]^2 \}^{1/2}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\theta(t) = \arctan \{ e^{\zeta_k \omega_k t} [a_{LP}(t) \tan(\omega_{djk} t + \varphi_{jk}) + \hat{a}_{HP}(t)] \}. \quad (11)$$

如果体系阻尼比 ζ 与自振频率的比值 $\frac{\zeta}{\omega_k}$ 比较小 ($\zeta \ll 1$, 对于工程上常用的阻尼比均满足此条件), 则由

(8)式得:

$$a_{LP}(t) \approx \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2\zeta_k \omega_k}{\zeta_k^2 \omega_k^2 + \omega^2} \cos(\omega t) d\omega = e^{-\zeta_k \omega_k t},$$

$$\hat{a}_{HP}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_{djk}}^{\infty} \frac{2\zeta_k \omega_k}{\zeta_k^2 \omega_k^2 + \omega^2} \sin(\omega t) d\omega \approx 0, \quad (12)$$

从而(10)和(11)式可以简化为

$$a(t) = c_{jk} e^{-\zeta_k \omega_k t}, \quad (13)$$

$$\theta(t) = \omega_{djk} t + \varphi_{jk}. \quad (14)$$

从以上两式可以得出:

$$\ln a(t) = -\zeta_k \omega_k t + \ln c_{jk}, \quad (15)$$

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_{djk}, \quad (16)$$

即可以通过 $a(t)$ 自然对数 $\ln a(t)$ 的斜率与 $\theta(t)$ 的斜率识别出体系的有阻尼自振频率与体系的阻尼比. 设 $\ln a(t)$ 的斜率为 p_1 , $\theta(t)$ 的斜率为 p_2 , 则有:

$$-\zeta_k \omega_k = p_1, \quad (17)$$

$$\omega_{djk} = \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} = p_2. \quad (18)$$

联立以上两式可以得出:

$$\omega_{djk} = p_2, \quad (19)$$

$$\zeta_k = \sqrt{\frac{p_1^2}{p_1^2 + p_2^2}}. \quad (20)$$

一般情况下, 瞬态幅值 $a(t)$ 与瞬时相位 $\theta(t)$ 将会出现调制现象, 即它们将在一个均值附近波动. 这时, 可以应用最小二乘法, 将 $\ln a(t)$ 与 $\theta(t)$ 作线性拟合, 拟合所得直线的斜率分别为 p_1 和 p_2 , 然后应用(19)和(20)式求出体系的有阻尼自振频率与阻尼比.

因此, 由体系任一层的绝对加速度值, 通过 EMD 方法, 可以求出体系的有阻尼自振频率与阻尼比.

3 双自由度体系分析算例

将双自由度线性体系的参数分别取值为: $m_1 =$

$m_2 = 1 \times 10^7 \text{ kg}$, $k_1 = k_2 = 4 \times 10^8 \text{ N/m}$, 则体系的无阻尼自振频率为: $f_1 = 0.622 \text{ Hz}$, $f_2 = 1.629 \text{ Hz}$. 体系的输入激励为简谐波: $a_g(t) = 0.05 \cos(2\pi f_0 t)$, $f_0 = 2.13 \text{ Hz}$.

首先分析一下小阻尼的情况. 将阻尼比 ζ 取为 0.02, 其对应体系的有阻尼自振频率为: $f_{d1} \approx 0.622 \text{ Hz}$, $f_{d2} \approx 1.629 \text{ Hz}$.

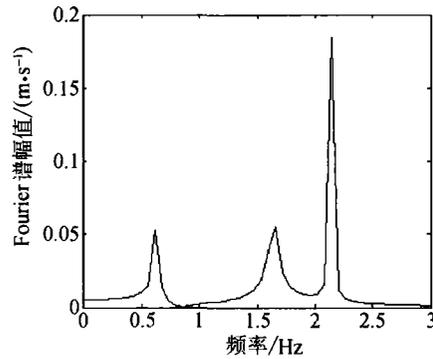


图1 一层绝对加速度 $a_1(t)$ 的 Fourier 谱

取体系一层的绝对加速度反应 $a_1(t)$, 其 Fourier 谱如图 1 所示. 可以看到 2.1, 1.6, 0.6 Hz 处有 3 个峰值点. $a_1(t)$ 原始数据及其分解后的前 3 个 IMF 分量如图 2 所示, 其他分量是 EMD 分解过程中数值计算误差造成的, 其本身不具备物理意义. 第一个 IMF 分量为体系稳态反应部分, 与激励频率相关, 与(3)式中的 \dot{x}_j^* 相对应; 第二、三个分量 $c_2(t)$, $c_3(t)$ 为体系的瞬态反应部分, 与(3)式中的 \dot{x}_{j1} , \dot{x}_{j2} 相对应. 以后的数据处理方法与此相同.

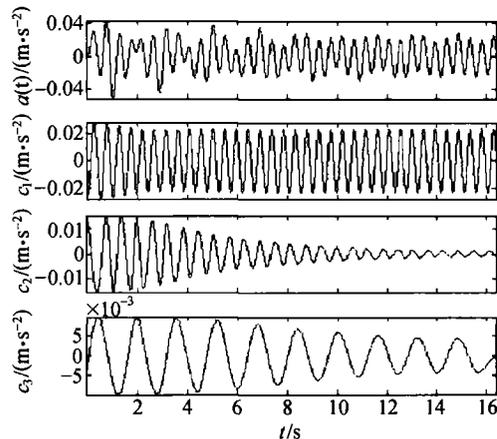


图2 一层输出绝对加速度 $a_1(t)$ 及其前 3 个 IMF 分量

由于 $c_2(t)$ 与体系的瞬态反应相对应, 所以通过 $c_2(t)$ 可以得到体系的模态参数. 对 $c_2(t)$ 进行 Hilbert 变换后, 所得到的瞬态幅值的自然对数 $\ln a(t)$ 与瞬态相位 $\theta(t)$ 分别如图 3(a) 所示. 图中实线表示对这两个时程曲线进行最小二乘拟合后所得到的直线. 这两条直线的斜率 p_1 与 p_2 很容易求出, 然后代入(19)和(20)式中, 可以得到 HHT 识别出的体系的第二有阻尼自振频率 \tilde{f}_{d2} 和阻尼比 $\tilde{\zeta}_2$ 如下: $\tilde{f}_{d2}=1.629$, $\tilde{\zeta}_2=0.018$, 这两个值与真实值 f_{d2} 和 ζ_2 的值非常接近.

对 $c_3(t)$ 进行相同的计算, 可以得到体系的第一有阻尼自振频率 \tilde{f}_{d1} 和阻尼比 $\tilde{\zeta}_1$ 如下: $\tilde{f}_{d1}=0.621$, $\tilde{\zeta}_1=0.020$.

此外, 应用 HHT 识别阻尼较大情况下体系的模态参数时也会得到类似结果. 但是阻尼比很大(如 0.10)时的结果没有阻尼比较小(如 0.02)时的结果精度高. 在另外 2 个阻尼比(即 $\zeta=0.05, 0.10$)的情况下, 应用 HHT 通过体系强迫振动识别出的体系的模态参数如图 3(b)~(c)所示, 其计算值与理论值之间的比较列于表 1 中.

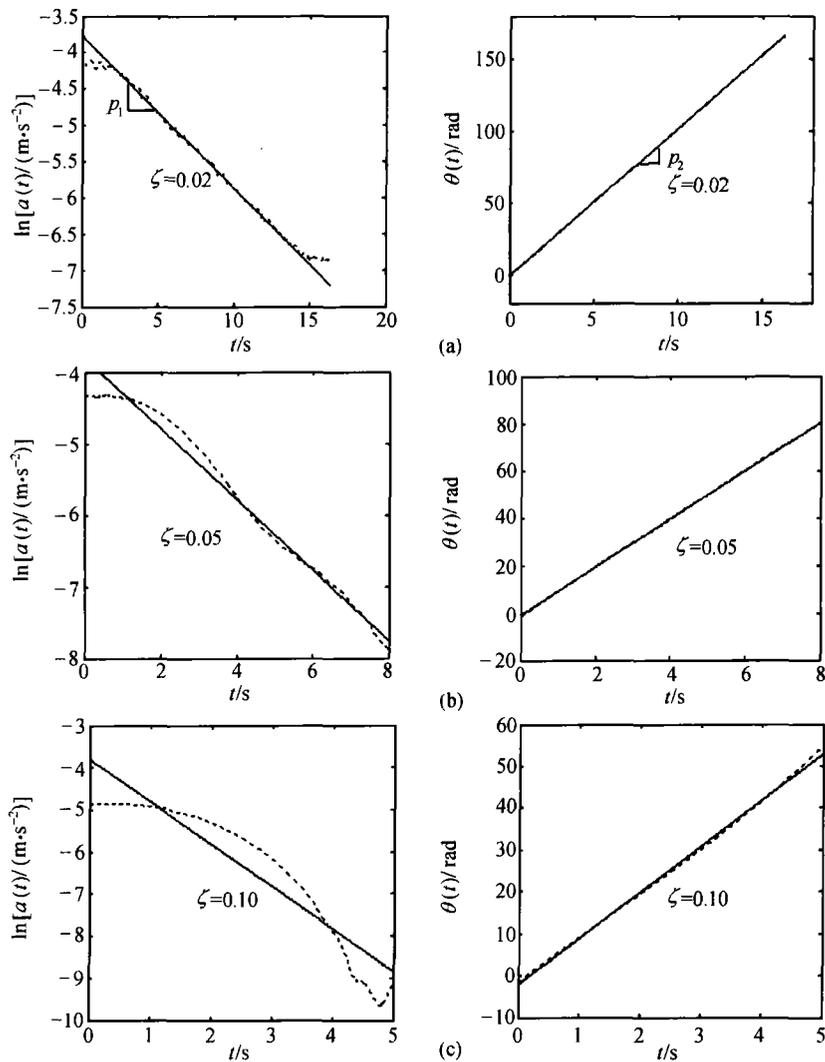


图3 各阻尼比时的 $\ln a(t)$ 和 $\theta(t)$ 值

(a) $\zeta=0.02$; (b) $\zeta=0.05$; (c) $\zeta=0.10$

表1 HHT识别结果与理论值比较

算例	自振频率理论值/Hz		自振频率识别结果/Hz		阻尼比理论值		阻尼比识别结果	
	f_{d1}	f_{d2}	\hat{f}_{d1}	\hat{f}_{d2}	ζ_1	ζ_2	$\hat{\zeta}_1$	$\hat{\zeta}_2$
1	0.622	1.629	0.621	1.629	0.02	0.02	0.020	0.019
2	0.621	1.627	0.615	1.625	0.05	0.05	0.045	0.054
3	0.619	1.621	0.640	1.671	0.10	0.10	0.091	0.090

4 结论

本文提出了一种识别强迫振动下双自由度体系的自振频率和阻尼比的方法。首先对于线性双自由度体系的强迫振动反应进行基于 Fourier 分析的 EMD 分解, 然后对得到的各个振动模态进行 Hilbert 变换, 识别出体系的自振频率及阻尼比。算例表明, 这一方法可以很好的识别体系的模态参数, 具有很高的精度。

参 考 文 献

1 Huang N E, Shen Z, Steven R L, et al. The empirical mode

decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis. Proc R Soc Lond, Series A, 1998, 454: 903—995
 2 Huang N E, Shen Z, Steven R L. A new view of nonlinear water waves: The Hilbert spectrum. Ann Rev Fluid Mech, 1999, 31: 417—457
 3 Vincent H T, Hu S L J, Hou Z. Damage detection using empirical mode decomposition method and a comparison with wavelet analysis. Proc of 2nd Int Workshop on Structural Health Monitoring. Stanford University, Stanford, 1999, 891—900
 4 Yang J N, Lei Y, Pan S W, et al. System identification of linear structures based on Hilbert-Huang spectral analysis, Part I: Normal modes. Earthq Eng Struct Dyn, 2003, 32: 1443—1467

“中法先进研究计划”地球科学领域双边学术研讨会在北京召开

“中法先进研究计划(PRA)”地球科学领域双边学术研讨会于2005年11月16—19日在北京召开。这是“中法先进研究计划”地球科学领域自1999年正式启动以来的第一次学术研讨会。会议由国家自然科学基金委员会和法国法中科学促进会共同主办。

在地球科学领域, 中法两国均居有重要的国际地位。中法两国地处欧亚大陆的东、西两端, 由于地域和文化的优势, 在地球科学诸领域具有得天独厚的合作潜力。两国在地球科学领域已有较长的合作历史, 是重要的合作伙伴。其中, 中法青藏高原合作研究是我国改革开放以来最早的国际科学合作研究之一。

1999年, 国家自然科学基金委员会与法国国家科学研究中心(CNRS)在北京共同组织了地球科学前沿研讨会, 其后, 在“中法先进研究计划(PRA)”框架下, 7年来已累计批准项目达30项, 项目研究内容涉及了地球科学主要的前沿领域。项目经过了专家的严格评审, 中法双方项目的主持人均是活跃在国际学术前沿的研究骨干。

本次会议邀请了自1999—2004年已资助的30个项目中的16个项目的负责人和骨干成员作为代表参加研讨。13位法方科学家和16位中方科学家在会议上讨论交流了项目的研究成果。与会两国科学家围绕地球早期生命与环境, 显生宙演化, 中国东部构造, 中国西部构造, 环境变化等5个主题共作了29个学术报告。

本次会议学术报告不但体现了各自的最新研究成果, 而且在表达上也做到了深入浅出, 实现了地球科学领域内的大跨度学术交流。通过本次学术会议, 中法双方科学家增进了相互了解, 并对今后的合作研究提出了许多新的设想, 圆满完成了会议的目标。

(供稿: 姚玉鹏)